**COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE – Exercice 1**

On s’intéresse à la stabilisation d’un pendule vertical satisfaisant aux équations (normalisées) :

où est une commande librement choisie.

On souhaite qu’en temps infini il rejoigne le point d’équilibre . On se propose de calculer une commande réalisant cet objectif par la méthode LQR.

**Q1/ Mettre le système sous forme d’état. Quelles sont les valeurs propres du système en boucle ouverte ? Comment se comporte-t-il ?**

On pose :

On a alors :

Les valeurs propres en boucle ouverte sont les racines du polynôme caractéristique de  :

Le système à deux valeurs propres complexes conjuguées  .

Le système est un oscillateur harmonique (stable mais pas asymptotiquement stable).

On cherche la commande qui minimise le critère quadratique suivant :

**Q2/ Former l’équation de Riccati algébrique correspondante**

On rappelle le théorème sur la commande linéaire quadratique :

**Théorème – Commande linéaire quadratique**

Soit un système linéaire :

On cherche une commande qui minimise le critère quadratique :

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. est commandable
2. est symétrique positive
3. est symétrique définie positive
4. Il existe une racine de telle que est observable (remarque : cette hypothèse est vérifiée si est symétrique définie positive)

Alors il existe une commande qui stabilise le système et minimise le critère quadratique :

où est l’unique solution symétrique définie positive de l’équation de Riccati algébrique :

La valeur du critère associée est :

Dans le cas de l’exercice, on a :

et sont symétrique définies positives donc on vérifies les hypothèses (b), (c) et (d).

Par ailleurs le système est bien commandable : est bien de rang 2 (on aurait aussi pu remarque que le système est sous forme de Brunovsky donc commandable).

L’équation de Riccati algébrique associée au problème de commande optimale est donc :

Soit en remplaçant , , et par leurs valeurs repectives :

Le contrôle optimal s’écrit quant à lui :

**Q3/ Résoudre cette équation. Donner l’expression du contrôle optimal.**

On note . L’équation de Riccati algébrique s’écrit alors :

On en déduit :

En commence par résoudre  :

On résout ensuite  :

Enfin, on résout  :

On en déduit ensuite le contrôle optimal :

On considère maintenant le problème un peu plus général de minimisation du critère quadratique :

**Q4/ Que se passe-t-il si est grand ? si est petit ?**

Si est grand, « la commande coûte cher ». La commande optimale va donc avoir tendance à être peu intense, quitte à laisser l’état éloigné de l’équilibre plus longtemps (réponse plutôt lente).

Si est petit, « la commande ne coût pas cher ». La commande optimale va donc avoir tendance à être assez intense, pour ramener au plus vite l’état à l’équilibre (réponse plutôt rapide).